CONCOURS DE RECRUTEMENT

DES ELEVES PILOTES DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coef. : 7

Les candidats doivent traiter deux, et deux seulement, des trois sujets proposés à leur choix.

1er Sujet :

On étudie le système S d'équations affines

$$\begin{cases} x\cos(\theta+\alpha) + y\sin(\theta+\alpha) + z\cos(\beta-\gamma) = \cos\alpha \\ x\cos(\theta+\beta) + y\sin(\theta+\beta) + z\cos(\gamma-\alpha) = \cos\beta \\ x\cos(\theta+\gamma) + y\sin(\theta+\gamma) + z\cos(\alpha-\beta) = \cos\gamma \end{cases}$$

où θ, α, β, γ sont 4 angles donnés.

1°) a) Montrer que le déterminant du système a pour valeur $2\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$

b) A quelles conditions le système est-il de Cramer ? En calculer la solution dans ce cas. (on pourra calculer d'abord la valeur de z , puis celles de x et de y)

2°) a) Dans quels cas le système S est-il de rang 2 ? Admet-il alors des solutions ?

b) On suppose $\alpha = \beta$ et S de rang 2. Déterminer la droite affine D ensemble des points M dont les coordonnées (x, y,z) dans un repère orthonormé donné satisfont au système S. Quel est l'ensemble des points où D coupe le plan xOy lorsque θ varie ?

c) Montrer que la droite D fait un angle constant avec l'axe Oz.

d) On suppose l'angle γ constant, soient $D(\theta)$ et $D(\theta')$ les droites D correspondant à 2 valeurs distinctes de l'angle θ. Par quelle transformation géométrique simple la droite $D(\theta')$ correspond-elle à la droite $D(\theta)$?

Quel est l'ensemble des droites $D(\theta)$ lorsque $\gamma = 0$?

3°) Soit δ un autre angle quelconque donné

a) L'équation $x\cos(\theta+\delta) + y\sin(\theta+\delta) + z\cos(\alpha-\beta) = \cos\delta$ est-elle compatible avec le système S ?

b) Soit S' le système constitué par cette équation et les 3 équations de S.

Déterminer tous les cas où S' est de rang 2.

2ème Sujet :

On cherche à déterminer une fonction f de $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, qui soit continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, et telle que $f(x^2) = \left[f(x)\right]^2$ quelque soit $x \geq 0$

1°) a) Montrer que $f(x) \geq 0$ quelque soit $x \geq 0$

b) Quelles sont les fonctions constantes qui peuvent convenir ?

2°) Soit a un réel strictement compris entre 0 et 1. On considère la suite $u_n = f(a^{2^n})$ pour $n \geq 0$. On suppose f solution du problème

a) Montrer que cette suite est convergente. Quelle est la limite ?

b) Montrer que f(a) ne peut être supérieur à 1

c) Montrer que si $f(a) = 1$, la fonction f est constante sur $[0, 1]$

d) Que dire de f(a) si f est non constante sur $[0, 1]$? Que vaut alors $f(0)$?

3°) On suppose toujours a strictement compris entre 0 et 1. On considère la suite $v_n = f(a^{2^{-n}})$

a) Montrer que cette suite est convergente. Quelle est sa limite ?

Montrer que si $f(a) = 0$, la fonction f est constante

c) On suppose f non constante. Que vaut $f(1)$?

4°) On suppose f non constante

a) Montrer que $f(x) \neq 0 \quad \forall\, x > 0$

b) On pose alors $g(x) = \dfrac{x\,f'(x)}{f(x)}$. Exprimer $g(x^2)$ en fonction de $g(x)$

c) Montrer que la fonction g est constante

d) En déduire toutes les fonctions f solution du problème
Quelles sont celles qui sont définies sur $\mathbb{R}$?
Quelles sont celles qui sont dérivables à droite en 0 ?

.../...

3ème Sujet :

Un solide lié au repère orthonormé direct d'origine A, défini par les vecteurs unitaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega})$, est en mouvement par rapport au repère fixe (Ox, Oy, Oz) dont les vecteurs unitaires $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constituent une base orthonormée directe d'un espace euclidien de dimension 3.

Le point A décrit la partie positive de l'axe Ox, avec une vitesse non nulle. Le point C défini par $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ décrit le cercle d'équations $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; on appelle θ l'angle polaire de $\overrightarrow{OC}$ par rapport à $\vec{i}$, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$: $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) = \theta$. Le point B défini par $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ reste sur la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

On appelle B' la projection orthogonale de B sur le plan xOy , soit $\vec{u}_1$ le vecteur unitaire dirigeant la demi-droite OB'. On pose l'angle $(\vec{i}, \vec{u}_1) = \alpha$ et $(\vec{u}_1, \overrightarrow{OB}) = \phi$, α étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et ϕ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, le produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{u}$ étant égal à $\sin \phi$.

Soit enfin D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \vec{\omega}$.

1°) a) Déterminer les coordonnées de C en fonction de θ , et celles de B en fonction de α et de ϕ ; puis celles de A.

b) En utilisant les valeurs de $\overrightarrow{AB}^2$ et de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer deux relations liant les angles θ, α et ϕ.

c) On suppose désormais $\theta \neq +\frac{\pi}{2}$. En déduire α en fonction de θ. Quel est l'angle des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$?

d) Déterminer cos ϕ en fonction de θ , et exprimer les coordonnées de B en fonction du seul angle θ. Entre quelles limites peut varier θ ?

2°) a) Déterminer une équation de la courbe Γ_1 décrite par le point B' , en coordonnées polaires de pôle O, et construire la courbe Γ_1 . Préciser les tangentes à la courbe Γ_1 aux points où elle s'arrête.

b) Déterminer une équation cartésienne de la courbe Γ_2 décrite par la projection B" du point B sur le plan xOz, et construire la courbe Γ_2. Préciser ses tangentes aux points où elle s'arrête.

c) Construire de même la courbe Γ_3 décrite par la projection de B sur le plan yOz.

3°) a) Calculer les coordonnées du point D en fonction de θ.

b) Déterminer le vecteur rotation instantané et la vitesse de glissement dans le mouvement du solide $(\vec{A}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega})$ par rapport au repère fixe.
On donnera le vecteur rotation instantané en fonction de $\vec{v}$ et de $\vec{k}$, et de θ, soit $\vec{\Omega}$ ce vecteur ; on donnera ensuite la vitesse instantanée de glissement en fonction de $\vec{\Omega}$ et de θ .